En nøiere Bestemmelse af Tegningen + og — i Henseende til deres Betydning og Brug, hvorved den i visse Tilfælde forekommende Tvetydighed forebygges.

Af

F. C. H. Arentz.

§. I.

Ved adskillige Anledninger har det forekommet mig, og ved nøiere Overveielse er jeg bleven bestyrket i den Tanke, at Tegnene + og — vare i Henseende til deres Betydning og Brug ikke fuldkommen bestemte, saavel som og, at de almindelige Regler, som pleie at gives for sammes Brug i Multiplication og Division, ikke ere saa uindskrænkede, som de sædvanlig holdes for at være. Der forekommer og virkelig undertiden de Tilfælde, hvor de algebraiske Beregninger ikke synes at have den bestemte Vished, som man ville vente af en mathematisk Videnskab, da forskiellige Udtryk synes at kunne udledes af de ellers fastsatte Grunde og derfor af forskiellige Mathematicis ere blevne bestemte snart paa een, snart paa en anden Maade, hvilket jeg aldrig har kunnet troe at være en Mangel i denne saa ypperlige Videnskab, men meget meere maatte komme af en liden Feil i Maaden, paa hvilken man har forestillet sig Sagen, hvilket jeg i Følgende vil stræbe at bringe til en nøiere Bestemmelse og Vished, overladende til Kyndige at dømme, hvorvidt jeg deri har været lykkelig.

§. II.

Rigtige og bestemte Begreber ere altid en Hovedsag i Sandheders Udfindelse, hvorover det og i nærværende Tilfælde bliver fornødent at undersøge Begrebet om de saa kaldte bekræftende og nægtende Størrelser. De første skal være de, som sætter noget Virkeligt, de sidste de, som borttager noget Virkeligt.

Enhver Størrelse er i sig selv noget Virkeligt og altsaa Bekræftende og pleier betegnes med +, men da en Størrelse kan voxe og formindskes, saa var det fornødent paa nogen Maade at kunne betegne de virkelige Størrelser, baade saavidt, som de tiener til at formeere, saa og saavidt de ere bestemte til at formindske det Virkelige. Det første betegnes ligeledes med +, men det sidste med —.

§. III.

Heraf følger for det første, at Tegnet + pleier at have disse tvende Betydninger, nemlig enten at betegne en virkelig Størrelse, endskiønt samme dog ikke tillige er at ansee, som den der formeerer noget Virkeligt, eller saadan en, som skal formere en anden virkelig Størrelse.

Begge kan med rette kaldes bekræftende, men da ikke enhvrr bekræftende Størrelse tillige kan kaldes Formeerende, saa vil vi kalde det første Slags virkelig uden at formeere, og det andet formeerende Størrelser.

§. IV.

Hvad videre de saa kaldte nægtende Størrelser angaaer, som betegnes med —, da synes heller ikke det Navn af Nægtende at udtrykke Hoved-Begrebet om dette Slags Størrelser, hvilket er at borttage noget Virkeligt, og altsaa at formindske det Virkelige, og er for saavidt Nægtende, men ikke alt, hvad der er Nægtende, er derfor strax Formindskende. Vi skal i det Følgende see at der gives blot modsatte Størrelser, som og betegnes med + og —, som hverken er at ansee som Formindskende eller Formeerende, men kan dog paa nogen Maade begge kaldes Nægtende, for saa vidt, de nægter det Modsatte, men bliver derfor ikke formindskende. Jeg holder altsaa for, at de Størrelser, som almindelig betegnes med —, burde heede Formindskende, naar de betragtes, som de, der nu formindsker noget Virkeligt. End videre er at mærke saavel om disse formindskende, som om de nyelig omtalte formeerende Størrelser, at, da de sætter eller borttager Deele i noget Virkeligt, saa kan de begge tiene til at ophæve hinanden indbyrdes, og følgelig kunde begge mellem sig med lige stor Ret kaldes formindskende.

§. V.

Disse tvende almindeligste Begreb om Størrelser, der betegnes med + og —, at de første ere Formerende, de sidste Formindskende, fremstiller sig undertiden tydelig, undertiden ere de ligesom skiulte i Sagens Natur og Beskaffenhed, som de angaaer. Heraf reiser sig atter en Bestemmelse, som med Nytte kan mærkes, nemlig, enten er den Størrelse, som noget kan formeere eller formindske, udtrykkelig forhaanden eller den alene efter Sagens da værende Beskaffenhed kunde have Sted. I første Fald ville jeg kalde det udtrykkelig formeerende eller formindskende Størrelser, i sidste Fald, ikke udtrykkelig formeerende eller formindskende.

§. VI.

For nøiere at kiende disse ikke udtrykkelig formeerende eller formindskende Størrelser, vil vi mærke: 1.) Det som i sig selv, uagtet ikke udtrykkelig, er formeerende, sætter forud noget Virkeligt, der kan ansees som ubestemt, og hvoraf det er en Deel; da nu samme Deel ikke er større, men kunde, som en Deel af et heelt, gierne være større, saa følger, at der maae tænkes et Modsat eller noget Formindskende, som giør at dette Virkelige i nærværende Tilfælde ikke bliver større, end det er; men da dette Modsatte Formindskende ligeledes er af ubestemt Størrelse, saa var det aldeles ikke mod Sagens Natur, at det kunde have formindsket og borttaget alt det Virkelige og efterladt alene noget, som var Formindskende. 2.) De Størrelser, som i sig selv, uagtet ikke udtrykkelig, ere Formindskende, sætter altid forud noget Virkeligt, som de skal formindske, og at der i nærværende Tilfælde har været de formeerende Størrelser, som har hindret, at det Formindskende ikke er gaaet videre, følgelig var det heller ikke her mod Sagens Natur, at det Formeerende aldeles kunde have ophævet det Formindskende.

§. VII.

Heraf følger, at de ikke udtrykkelig formerende og formindskende Størrelser, som i et Particulær Tilfælde, ere + og —, kunde efter Sagens Natur gierne gaae over til det Modsatte, ligeledes er og vel at mærke, at hvorsomhelst Tegnene har en virkelig formeerende eller formindskende Betydning, der har de og Indflydelse paa Storheden eller Eenhederues Mængde; thi det, som formindsker eller formeerer en virkelig Størrelse, det giør at Antallet af Deelene eller Eenhederne bliver større eller mindre i det heele og altsaa har det Indflydelse paa Storheden eller Eenhedernes Mængde.

§. VIII.

Men da det ofte skeer, at enten det Formerende eller Formindskende saaledes kan voxe, at det eene ophæver det andet og kan endnu indeholde mere, end hvad der udfordredes til det Modsattes Ophævelse, saa angiver dette vel ikke noget, som er mindre, end Intet (thi en Størrelse kan ikke blive mindre end Intet) men det viser kun at Størrelsen er gaaet over til noget, der har en modsat Beskaffenhed, hvilket begynder, hvor det første ender og kan betegnes ved en Linie, der fra en Punkt udstrækkes til lige modsatte Sider. Herover har man fundet for got endogsaa at bemærke modsatte Størrelser, som vi i det følgende vil kalde dem, med de sædvanlige Formerelses og Formindskelses Tegn, følgelig fremkommer her atter en Betydning af + og —, hvilke pleier behandles, som de, vi forhen har talt om, men er dog ikke i alle Tilfælde det samme; thi saa snart, som disse modsatte Størrelser, der betegnes med de sædvanlige Tegn, ikke tillige ere Formerende eller Formindskende, burde de ikke behandles paa sædvanlig Maade. I det Tilfælde, da de ere hinanden allene modsatte, uden at have Hensigt til at formere eller formindske det Virkelige, vil vi til Forskiel kalde dem blodt modsatte Størrelser.

§. IX.

At der er en virkelig Forskiel imellem formeerende eller formindskende Størrelser og de blot modsatte, kan deels sluttes deraf, at det eene Begreb ikke nødvendig er aldeles det samme som det andet; thi uagtet de ere hinanden modsatte, følger deraf ikke, at deres Bestemmelse i nærværende Tilfælde var at formindske hinanden, deels kan det og sees af de Exempler, som i det følgende forekommer. Man kiender og let de blot modsatte Størrelser fra de, der tillige ere formeerende eller formindskende, naar man alene giver Agt paa, om Tegnet + eller — i da værende Tilfælde har noget udtrykkeligt eller underforstaaet, som det skulle formeere eller formindske, saa at det eene Modsatte tillige kunde ansees, som det, der ophævede noget i det andet Modsatte, som ellere skeer, (§. 4. 7.) thi hvis det ikke er, giver Tegnene alene tilkiende, at af 2de Modsatte har her ikkun det eene Stæd, hvilket vel, for sig selv betragtet blot som en Størrelse, kunde være større eller mindre, men Tegnet har derfor ingen Indflydelse eller Hensigt til at giøre noget større eller mindre.

§. X.

Heraf sees fremdeles, at de Tegn, som tilhører blot modsatte Størrelser har ingen Hensigt paa Tingenes egentlige Storhed eller Deelenes og Eenhedernes Mængde: thi de har ikke Hensigt paa enten at formindske eller formeere (§. 7.) Dernæst sees og, at af blot modsatte Størrelser enten ingen kan kaldes Nægtende; thi ingen af dem nægter eller bortrager noget Virkeligt, eller de begge med lige Ret og i en vidtløftig Meening kan kaldes nægtende, for saa vidt, at, naar man sætter en af to modsatte Ting, saa har man der paa en vis Maade til Side sat det andet, med deraf følger ikke at de formindsker hinanden. Ligeledes kan de og gierne begge kaldes bekræftende, fordi de begge sætter noget Virkeligt, men deraf følger ikke at de formeerer hinanden. Endelig sees og at at en Størrelse, som ikke nødvendig nu har det Tegn, den haver, men kunde ligesaavel havt det Modsatte, den bliver ikke en blot modsat Størrelse; thi det giver tilkiende, at der er en ubestemt virkelig Størrelse underforstaaet, som den formeerer eller formindsker. (6. og 7.)

§. XI.

§. XI.

De Størrelser, som ere virkelige, dog uden at formeere (§. 3.) kan være modsatte eller ikke engang modsatte; thi de kan i det mindste betragtes, som blotte Størrelser, uden Hensigt til noget Modsat. De sidste vil vi kalde blot virkelige Størrrlser. Af det vi hidindtil har sagt, følger, at enhver Størrelse kan ansees, enten som blot virkelig eller som tillige modsat. Har den Modsættelses Hensigt, kan den enten være blot modsat, eller den tillige kan være formeerende eller formindskende og dette igien enten udtrykkelig eller ikke udtrykkelig. + a kan derfore betegne et blot virkeligt *), eller et saadant, som har Hensigt paa et Modsat —, uden det kan betegne noget, der nu skal formeere en virkelig Størrelse. Ligeledes kan — betegne enten et blot Modsat eller en tillige formindskende Størrelse.

§. XII.

Efterat vi saaledes nogenlunde har betragtet de forskiellige Betydninger, som Størrelserne kan have i Henseende til Tegnene + og —, gaaer vi videre for at see sammes Anvendelse og troer da at kunde viise, at hverken de Regler, som gives for Tegnenes Multiplication og Division, ere saa uindskrænkede, som de angives at være, heller ikke at der er nogen Uvished i det, som ved de algebraiske Methoder udbringes, men at den Uvished, som endog undertiden har foraarsaget ulige Meeninger, kommer alene af en Slags Tvetydighed i Henseende til Tegnene.

§. XIII.

Allerførst vil vi lidt opholde os med at betragte den almindelige Regel og sammes sædvanlige Beviser. Det er anseet at være en Sætning uden Undtagelse, at samme Tegn i Multiplication og Division giver +, men for-

 skiællige

*) Det blot virkelige burde egentlig intet Tegn have, som og ofte iagttages; thi Tegnene burde altid give en Modsættelse tilkiende, derimod naar man udelukker Tegnet i de virkelig modsatte Størrelser, ja endog i de formeerende, synes det ikke at være ganske passeligt.

skiellige Tegn giver — i Producten eller Qvotienten. At + multipliceret eller divideret med + maatte alletider give +, har man snart ikke troet kunde behøve Beviis, men vi skal i det Følgende see, at dette ikke engang er uden Undtagelse og at de blot modsatte Størrelses ikke saaledes bør behandles. Derimod har man anseet det lidt meere uforstaaeligt og trængenne til Beviis, naar der fastsættes, at + med — og — med — giver +.

§. XIV.

For at bevise, at — og +, multiplicerede og dividerede med hinanden, giver —, beraaber man sig paa at Multiplication og Division er i sig selv en Addition og Subtraction, og at, naar en nægtende Størrelse tages saa og saa mange Gange, blir det Udkommende fremdeles nægtende og, at den samme Regel maatte giælde i Henseende til Divisionen, da man ved at multiplicere Divisor og Qvotient, maatte kunde faae igien det samme Tal, som var divideret. Men man har i det alt ikke forestillet sig, at der kunde gives Størrelser, som vare blot Modsatte uden tillige at være Formerende og Formindskende. Hvis Størrelser ere af denne Beskaffenhed, da giælder Beviset ikke; thi da har Tegnene + og — ingen Hensigt til Storheden og Eenhedernes Mængde (§. 7 og 10) Følgelig kan de heller ikke, saavidt som de har det ene eller det andet Tegn, have nogen Hensigt paa, hvormange Gange den foregivne Størrelse skulle tillægges eller fradrages, som af det følgende end videre kan indsees. Af lige Beskaffenhed er det Beviis, man og pleier at tage af at forestille sig — som en Giæld og + tvertimod; thi disse Forestillinger give tydelig nok tilkiende, at man da kun taler om Formerende og Formindskende Størrelser.

§. XV.

Da disse Grunde syntes ikke at være ganske passelige til at afgiøre at — multipliceret med — gav +, har man dertil anvendt et andet Beviis; saaledes har man sluttet; — a multipliceret med — b maatte enten give + ab eller — ab, det sidste kan det ikke være; thi det er just det som udkommer ved at multiplicere — a med + b; altsaa maatte det første antages nemlig + ab, men mon ikke

et

et Tredie kunde have Stæd? og man skulle snart med lige saa god Føie kunde sige, at det da heller ikke maatte være + ab; thi dette udbringes og af + a multipliceret med + b.

§. XVI.

Andre har forsøgt at afgiøre Sagen ved en Geometrisk Forestilling i det de lader tvende Linier overskære hinanden i en Punkt og anseer, hvad som ligger paa den eene Side som + og paa den anden Side som —, da man ved at danne en Triangel paa den ene Side og at trække en Parallel paa den anden Side udbringer 4re Linier, der staaer i Proportion og viser at — multipliceret med — giver + hvilket alt er noksom bekiendt, men endog her sættes forud, at Linierne ere saadanne Størretser, som formindsker og formener noget virkeligt; thi der antages og en Linie som Eenhed med Tegnet +, hvilket her bliver et Formerelses Tegn og ikke et blodt Modsat og den paafølgende Omgangs Maade viser, at Linierne eller de Størrelser, som ved samme forstaaes lader af at være blodt Modsatte, hvilket sees deraf, at, saavel i dette Tilfælde, som i alle andre, hvor man ved en Geometrisk Construction vil bevise, hvilken af de modsatte Sider eller Størrelser Sagen falder ud til, sættes altid forud, at man har med saadanne Størrelser at bestille, som ikke nødvendig er + eller —, men kunde under andre Omstændigheder faldet ud til noget, som var det nu værende Modsat, følgelig er kun at ansee, som Dele, der formerer eller formindsker noget Virkeligt, om samme end ikke udtrykkelig er forhaanden (5 og 10)

§. XVII.

Andre har igien villet afgiøre det paa den Maade, at — a multipliceret med — b maae give + ab, fordi — a nægter a, da nu — b ogsaa nægter, saa bliver det det samme, som at nægte det Nægtende hvilket skal være at bekræfte, men dette Beviis synes at sætte førud, at af 2de modsatte Ting maatte altid det ene have Sted, hvilket ikke er rigtigt, uden de ere hinanden saaledes Modsatte, at intet Tredie kunde tænkes; thi da kunde man slutte fra at nægte det ene til at sætte det andet, men Tegnene + og — indbefatter ikke nødvendig saadan Modsættelse.

§. XVIII.

§. XVIII.

Endelig er der og de, som har forestillet sig Sagen paa den Maade, at Tegnet — i sig selv giver tilkiende, at noget er taget formeget, hvilket bør erstattes, naar altsaa — a multipliceret med — b giver + ab, kommer det deraf at — a er forhen taget saamange Gange formeget, som b indeholder Eenheder, hvilket igien maae oprettes ved at tillægge ab. Dette Beviis er efter mine Tanker det retteste og fuldkomneste; thi det angiver i det ringeste en tilstrækkelig Grund, hvorfore man i de allerfleste Tilfælde maae handle saaledes, men derved er dog tvende Ting at mærke. 1. At man har anseet det som et Beviis for en Regel uden Undtagelse, da det dog slet ikke kan passe sig paa blodt Modsatte Størrelser. 2. Har man ikke anviist den Forskiel mellem de udtrykkelig formerende og formindskende og de ikke udtrykkelig Formerende og Formindskende Størrelser, hvorved man let kunde falde paa de Tanker at Beviset var upasseligt i alle de Tilfælde, hvor der ikke tillige var andre Størrelser forhaanden med de der havde Tægnet —. Men heraf sees tillige baade, at det er fornøden at forstille sig de Størrelser, der i Multiplieation skal kunde behandles efter de sædvanlige Regler, som Formerende og Formindskende, saa og, at det er gandske fornøden at giøre Forskiel imellem de, der udtrykkelig eller ikke udtrykkelig ere saadanne.

§. XIX.

Da vi nu har seet, at de almindelig antagne Regler og Beviser ikke saa ligefrem kan gielde uden al Indskrænkning, saa følger at vi og maae viise, hvorledes disse Størrelser, vi forhen har talt om, bør behandles. Her bliver allerførst at mærke, at en Størrelse enten den er blot modsat eller den er tillige formeerende eller formindskende, kan ansees som sammensat af en Eenhed med det Tegn, som Størrelsen tilhører og en blot virkelig Størrelse, følgelig kan de og altid opløses i samme, saasom $-a = a \times -1$, da — her bliver det samme som — forhen betegnede, nemlig enten blot modsat eller formindskende. Er Størrelsen sammensat, som $-(a-b)$, er det best at ophæve Sammensættelsen, saa at man med Vißhed kunde sætte $-(a-b) = -c$ eller $+c = -1 \times c$ eller $+1 \times c$, i det mindste maatte man indtil videre re kunde ansee den sammensatte Størrelse som blot virkelig, i Fald saadan Opløsning skulde skee. Hvorledes i Øvrigt de blot virkelige Størrelser skal behandles, sees let. De indbefatter Eenheder uden Modsættelse, følgelig bør Producten af dem selv indbyrdes eller Qvotienten intet Tegn have, og i Fald de muntiplicerer eller dividerer enten de Formindskende og Formeerende eller de blot Modsatte, kan de ingen Forandring foraarsage i disse Tegn.

§. XX.

Hvad dernæst de formeerende og formindskende Størrelser angaaer, da er at mærke: 1) At, hvor de multiplicerer eller dividerer de blot virkelige, giør de at Producten og Qvotienten bliver og af den Beskaffenhed at være enten formeerende eller formindskende; thi der maae da alletider være noget, hvortil Producten eller Qvotienten skulle tillægges, eller hvorfra det skulle afdrages, det maatte være udtrykkelig eller ikke udtrykkelig og Tegnene i Producten og Qvotienten maae da blive de samme, som i de multiplicerende og dividerende; thi det blot virkelige kan ingen Forandring giøre i Tegnene. 2) I Fald de multiplicerer eller dividerer andre formeerende eller formindsiende Størrelser, da bliver de sædvanlige Regler at iagttage, alene man mærker, at den sande Grund dertil, for Exempel at $- \times - = +$ og saa videre, er, hvad vi har sagt §. 18. 3) I Fald de multiplicerer eller dividerer blot modsatte Størrelser, saa mærkes, at, da alle de Størrelser, som skal sættes i det Forhold mod hinanden, enten af Multiplication eller Division, maae kunde betragtes som Eenheder eller et Antal af Eenheder, men de blot modsatte Størrelser har i Henseende til Tegnene ikke Hensigt paa Eenhedernes Mængde, saa følger, at Multiplication og Division ikke kan skee ved disse, uden alene i Henseende til det, som i dem er blot virkeligt og Producten eller Qvotienten bliver da, saa vidt som den udbringes af den formeerende eller formindskende og den blot virkelige, at bestemme efter det, vi nyelig sagde, dog maae Modsættelsen derfor ikke forbiegaaes eller udelukkes. Saaledes, hvis $-a$ er en blot modsat Størrelse, og samme multipliceres med en formindskende saasom $-b$, bliver det $-1 \times -ab$, hvis den divideres er det $-1 \times -\frac{a}{b}$, da -1 endnu som forhen betegner et blot Modsat. (§. 19.)

§. XXI.

Forend vi gaaer videre, er det fornøden endnu at erindre følgende Sætning: Naar een og den samme Størrelse dividerer sig selv, den være af hvad Slags den være vil, bliver Qvotienten alletider at ansee som blot virkelig. Aarsagen er, at naar det er selv samme Størrelse, kan den i sit fulde Indgreb tilligemed sit Tegn ansees, som en Eenhed og sporges da kun; hvormange Gange den ene indeholdes i den anden. Saaledes bliver da $-b : -b$ at ansee som $(-b):(-b) = 1$ eller $\frac{1 \times (-b)}{1 \times (-b)} = 1$; ligeledes $\frac{-a}{-b} = \frac{-1 \times a}{-1 \times b} = \frac{a}{b}$ uden Tegn. Man seer og lettelig, naar en Størrelse tillige multipliceres og divideres med en og den samme Størrelse, var det just det samme, som, om intet var foretaget; thi det var ikke andet end paa engang at tillægge og fratage en og den samme Størrelse. Vel skulle det synes i Følge den foregaaende §, at naar for Exempel $\pm a$ var en formeerende eller formindskende Størrelse og ligeledes Divisor $\pm b$, Qvotienten da og maatte blive en formerende Størrelse, det er, $+\frac{a}{b}$ og ikke en blot virkelig, det er, $\frac{a}{b}$, men herved er at mærke, at saavidt som ± 1, der faaes ved Oplosningen (§. 19.) er fuldkommen en og den samme, saa bliver ikke alene ± 1 at ansee, som de der deviderer sig selv, men endog det heele, hvoraf de ere en ikke udtrykkelig formeerende eller formindskende Deel, maae ansees ved det samme at være divideret og tillige det, som dividerer, følgelig ophører Erstatningen (§. 18.) hvilket ikke var den samme Størrelse desuden, hvor Qvotienten skal tillægges andre Størrelser, og det umiddelbar, kan da i deres heele Indbegreb ikke have været fuldkommen de samme, men skeer det middelbar, kan saavel det blot virkelige, som blot modsatte igien forandres til formeerende eller formindskende.

§. XXII.

Nu bliver det en læt Sag at bestemme, hvorledes det maae forholde sig, naar det tredie Slags Størrelser, nemlig de blot modsatte ere de, som multiplicerer eller dividerer. Da disses Tegn ikke har Hensigt paa Eenhedernes Mængde de, kan de (som vi før sagde) ikke tage Deel i Multiplicationen og Divisionen, hvilke alene kan skee i Henseende til den Deel af samme, som kan adskilles som en blot virkelig Størrelse, og i øvrigt maae Modsættelses Tegnene ikke udelukkes. Saaledes bliver $- a \times + b$ enten som det er, eller det udtrykkes $(- 1 \times a) \times (+ 1 \times b)$ eller $(- 1 \times + 1)\, ab$, og saa videre. Hvis derimod 2de blot modsatte Størrelser, saavidt som de ere modsatte mod noget andet, ere een og den samme og skal dividere hinanden, ophæver de hverandre og Qvotienten bliver blot virkelig. Saaledes at $\frac{-a}{-b}$, om begge ere blot modsatte, bliver $= \frac{a}{b}$ uden Tegn; efter det vi nyelig sagde §. 21.

§. XXIII.

Af dette sees, at den almindelig antagne Regel i Henseende til Tegnenes Forandringer, nemlig at samme Tegn giver + og forskiellige Tegn giver —, ikkun har Sted i Henseende til de formerrende og formindskende Størrelser saa og de blot virkelige, naar man efter sædvanlig Maade tillægger endog dem Formeerelses Tegn (§. 11.) endskiønt jeg ville heller have Regeln udtrykket paa følgende Maade: at en formeerende Størrelse, som multiplicerer eller dividerer en anden, lader denne andens Tegn blive uforandret i Producten eller Qvotienten, derimod, hvis det er en formindskende Størrelse, som multiplicerer eller dividerer en anden, forandrer den altid dennes Tegn til det modsatte i Producten og Qvotienten; thi dette viiser nærmere til Aarsagen, hvorfore saadan Behandlings Maade har Sted. Derimod i Henseende til de blot modsatte Størrelser har Regelen ikke Sted og heller ikke dens Grund.

§. XXIV.

Nu skulle man maaskee tænke, at de Tilfælde, hvor den almindelige Regel ikke kunde bruges, næsten aldrig skulle kunde komme for, men de ere dog ikke saa aldeles usædvanlige. I Almindelighed bør man undersøge, om Tegnene i den

den Sammenhæng, de staaer, sigter til umiddelbar at formeere og formindske, og i Fald dette ikke er, maae man ikke lade det falde sig forunderligt, at de ellers antagne Regler tilsidesættes og at for Exempel $-a \times -a$ ikke altid maae sættes $= +a$ og saa videre. Alle Størrelser kan betegnes med Linier, men det er ikke usædvanligt, at ansee en Linie, som er udstrakt fra en Punct, som +, og det, der udstrækkes til den modsatte Side, som —, hvoraf endnu ikke følger at de skal formindske hinanden *). Og om end denne Linie eller Størreise, som gik til den eene Side, i en Henseende blev anseet som formeerende eller formindskende, saa kunde dens Brug dog let saaledes forandres, at den blotte Modsættelse var tilbage. Dette vil skee, naar man ved Multiplication eller Division anbringer en Størrelse med bestemt Tegn under et Dignitets eller Rod-Tegn eller noget andet Tegn, der adskiller de under samme værende Størrelser fra umiddelbar

*) Saaledes kunde man for Exempel i Anledning af Frictionen i den circulære Bevægelse spørge, hvor det fælles Frictionens Center var, naar en Plan eller Linie bevægede sig om et vist Punct i samme. Hvad der var paa den ene Side af Puncten synes at kunde kaldes $+a$ og det paa den anden Side ligeledes $-b$. Da nu Frictionen efter det, jeg har viist i en Afhandling desangaaende (see det Kongelige Videnskabers Sælskabs Skrlfter 11te Tome pag. 47.) forholder sig som Qvadraten, men Momentet som den tredie Værdighed, saa skulle man snart ingen Betænkning giøre sig at sætte $(+a)^2 = +a^2$ og $(-b)^3 = -b^3$, og saaledes for det fælles Friktionens Centner udbringe $\dfrac{+\frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{3}b^3,}{+\frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2,}$ hvilket dog er urigtigt. Aarsagen er, fordi disse Størrelser, som man fra først af ansaae som modsatte, vare ikke tillige formindskende eller formeerende mod hinanden, men det som meere er, end ikke den blotte Modsætning kommer her i nogen Betragtning, saa at de 2de Størrelser a og b her ere blot virkelige Størrelser, hvilket sees deraf, at Modsættelsen i det følgende ikke nytter til noget, men det kommer alene an paa at finde Centrets Afstand fra den antagne Punct, som en blot virkelig Størrelse, hvorudover det og er lige gyldigt, til hvilken af de modsatte Sider man sætter det fundne Frictionens Center. Skulle derimod Modsættelsen i det følgende iagttages, maatte den ikke forbigaaes, som skal sees af andre Exempler. Vel tilstaaer jeg, at der udfordredes kun liden Indsigt til at vogte sig for Feiltagelse i dette og andre deslige og andre Exempler, da man ikke længe vilde betænket sig paa at sætte + for begge Liniers Udtryk, endog de i en vis Maade var hinanden modsatte, men efter mine Tanker blev her det retteste ingen Tegn at bruge; thi saa snart man endog ikkun sætter + for en Størrelse, viser det allerede, at man har Hensigt paa i det mindste at bruge den som noget modsat.

delbar enten at formeere eller formindske andre Størrelser, men derved maae dog tillige tilstaaes, at Nødvendigheden af disse Jagttagelser bliver mere sielden i Henseende til de blodt modsatte, deels ved det man kan forandre en blot Modsat til blot Virkelig ved at skille Tegnet fra Størrelsen (§ 19) da den blot Virkelige siden kan bruges uden Tegn, dernæst og ved det at, naar det, der giør Adskillelser ophæves, kan de blot Modsatte igien blive Formeerende og Formindskende.

§. XXV.

Vi vil forsøge at bestyrke det, vi har sagt, med besynderligere Exempler. De vigtigste har Stæd, hvor man behøver at multiplicere Tal, som staaer under Rod-Tegnet. Jeg sætter $\sqrt[n]{}\, a$ skal multipliceres med $-b$, hvor det synes man uden Betænkning kunde føre $-b$ under Rodtægnet ved det man paa sædvanlig Maade ophøiede den til Digniteten n, hvoraf ville komme $\sqrt[n]{}\, a \times (-b)^n$, som man ikke ville tage i Betænkning ved første Øiekast at sætte $= \sqrt[2r]{}\,(a \times b^{2r})$, i Fald n var et lige Tal, som her sættes $= 2r$, naar nu Roden siden virkelig blev uddraget, fik man $b \sqrt[2r]{}\, a$ i Steden for $-\sqrt[2r]{}\, a$, hvilket ikke kunde forebygges, uden ved at erindre sig, at b^{2r} var kommen af $-b$, hvilket alle rede sætter forud en Mangel i Methoden. Sagen er denne, saa snart $-b$ skal bringes hen under Rodtægnet og der multipliceres med sig selv, bliver strax Tegnet — sat uden for den Orden, i hvilken det skulle være formindskende; thi saavidt som det her multiplicerer sig selv, er det adskilt fra de Størrelser, i Henseende til hvilke det kunde været Formindskende og bliver nu at ansee som et blot Modsat, hvor den sædvanlige Maade med Tegnene ikke kan bruges, og uagtet enhver let kunde vide at forebygge dette fra først af ved at sætte b som et blot Virkeligt, saa at man fik $-\sqrt[2r]{}\,(a + b^{2r})$, saa maatte man endnu spørge, hvorfor ikke ogsaa den anden Methode, som dog synes at være lige efter de antagne Regler, ligesaa vel kunde anvendes? men end mere, naar man endog havde gaaet frem, som ofte skeer, og sat $-\sqrt[2r]{(a+b^{2r})}$ og man deraf vilde uddrage Roden, kunde man endnu falde i den Tvetydighed, at $\sqrt[2r]{b^{2r}}$ for sig selv betragtet efter det af alle antagne kunde ligesaavel være $= -b$ som $+b$ og altsaa kunde man endnu tilsidst ligesaa snart faa $+b\sqrt[2r]{a}$, som $-b\sqrt[2r]{a}$, hvilken Tvetydighed igien forebygges ved at give Agt paa den Forskiel mellem blot virkelige Størrelser og de der tillige ere modsatte. Her var b kun at ansee, som en blot virkelig Størrelse, der hverken selv eller dens Dignitet bør have enten Tegnet — eller +.

§. XXIV.

Vi seer altsaa, at ved disse Jagttagelser bliver, som vi i det første sagde, de ellers muelige Tvetydigheder forebyggede, som kan indtreffe ved at udtrække Roden af Størrelser, der ere ophøiede til Dignitæter, hvis Exponent er et lige Tal. Saaledes bør det aldrig være usikkert, hvad $\sqrt{+a^2}$ bør være, om den skal være $-a$ eller $+a$ eller begge Deele; thi enten har Roden, hvoraf $+a^2$ er kommen, været en blot virkelig Størrelse, i hvilket Fald saa vel a^2 som Roden har været en blot modsat Størrelse, da man heller ikke burde havt $\sqrt{+a^2}$, men enten $\sqrt{(+a \times +a)}$ eller $\sqrt{(-a \times -a)}$, i hvilke man aldrig kunde tage Feil at bestemme Roden, endelig kunde Roden og have været en formeerende eller formindskendr Størrelse, da $\sqrt{+a^2}$ ligesaa vel er $-a$, som $+a$ og man tager ikke Feil ved at sætte hvilken af dem, man vil, uden at udelukke den anden; thi hvilken man sætter, kunde dog det modsatte ligeledes have havt Sted (6 og 7)

§. XXVII.

Disse Jagttagelsers Nødvendighed sees end mere, hvor Størrelser, som begge ere under Rodtegnet, skal multipliceres med hinanden og især, naar begge ere blant de saa kaldede umuelige Størrelser. Ja heri har endog været ganske uligelige Meeninger hos forskiellige Autorer hvilken Uvished jeg dog troer kan hæves ved at lægge Merke

til

til den forskiellige Brug af Tegnene, som her er viist. Man har spurgt, hvad der ville komme ud, naar $\sqrt{-a}$ blev multipliceret med $\sqrt{-a}$. Nogle har meent, at man ligefrem efter de sædvanlige Maader at behandle Tegnene kunde sætte det $= \sqrt{+a^2} = +a$ andre har meent, at det var $= \sqrt{-a^2} = -a$, men i det første er Udfaldet, nemlig $+a$ urigtigt og i det sidste er vel Udfaldet, nemlig $-a$ rigtigt, men Maaden, paa hvilken man kommer dertil, skulle ikke letteligt kunde finde Biefald eller bevises, derimod skal vi see, at den omtalte Product bliver hverken $\sqrt{+a^2}$ eller $\sqrt{-a^2}$.

§. XXVIII.

Det skulle neppe tages i Tvivl, at jo $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ maae være $= -a$; thi ligesaa vel som $\sqrt{a} \times \sqrt{a}$ er det samme, som $\sqrt{a}$ ophøiet til den anden Dignitet og følgelig $= a$, ligesaavel maae man troe, at $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ er $= (\sqrt{-a})^2 = -a$, men det synes derimod, som vi nyelig sagde, at $-a \times -a$ maatte kunde være $+a^2$ og Roden deraf $+a$, men just dette kan undgaaes, naar man ikke bruger Tegnene anderledes end Beviiserne tillader. Aarsagen er, at her er 2de blot modsatte Størrelser og ikke formindskende, følgelig er der ikke tilstrækkelig Grund til at sætte Producten $= +a^2$, hvilket let kan sees deraf, at det $-$ under Rodtegnet ikke forbinder Størrelsen med de andre Størrelser, som enten udtrykkelig eller ikke udtrykkelig kunde staae i Sammenhæng med Roden, hvilken derfor desuden kan have sit eget Tegn, og saavidt som $-a$ her multipliceres med $-a$ er ingen Grund til at sætte forud, at nogen af dem kunde i dette Tilfælde været større eller mindre, at de kunde gaaet over til $+$, eller at Producten af $-a$ multipliceret med $-a$ maatte blive $= +a^2$, fordi derunder kunde forstaaes en anden Produkt med Tegnet $-$, som her paa nogen Maade skulle ophæves ved det modsatte $+a^2$ (§. 18. 20.). Heraf følger at $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ ikke anderledes kan bringes undet et Rodtegn end ved at sættes $= \sqrt{(-a \times -a)}$, hvilket bliver det samme, som $\sqrt{(-a)^2}$ eller $\frac{-a \times -a}{-a}$ og da bliver ikke længer nogen Vanskelighed i at bevise, at det $= -a$; thi Qvadraten er Roden multipliceret med sig selv og ingen af

dem

dem kunde i dette Tilfælde være anderledes, efterdi $+ a^2$ var urigtig *). Ja det bliver og en Følge af §. 21.

§. XXIX.

Det samme har Sted, om end Størrelsen er sammensat eller om man multiplicerer 2de forskiellige Rødder mod hinanden, da denne Jagttagelse er ikke mindre nødvendig for Exempel $\sqrt{(a-b)}$ skal multipliceres med $\sqrt{(c-d)}$ Dette bør sættes $= \sqrt{(a-b)} \times (c-d)$, saavidt som $(a-b)$ og $(c-d)$ ere blot modsatte Størrelser, hvilket de og kunde være (§. 19.). Ville man derfore sætte Producten $= \sqrt{(+ac - bc - da + db)}$, hvor let kunde man ikke siden i at bruge denne Størrelse, især, naar Roden skulle uddrages enten fuldkommen eller ved Nærmelse, komme til at tage Feil i Henseende til Tegnet,

*) Man seer lettelig, at naar jeg sætter, at $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \sqrt{(-a \times -a)} = -a$ saa hviler det paa samme Grund, som, naar jeg forhen har sagt, at $-a$ multipliceret med $-a$ ikke strax var $+a^2$, kunde derimod $-a$ i nærværende Tilfælde ansees som en formindskende Størrelse, saa at det modsatte her og kunde havt Sted og der ligesaavel kunde været $\sqrt{+a}$ som $\sqrt{-a}$, da kunde gierne $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ været $= \sqrt{+a^2}$, men da blev Roden deraf ligesaavel $+a$: som $-a$, og det samme har fuldkommen Sted ogsaa i Henseende til $\sqrt{+a} \times \sqrt{+a}$; thi er $+a$ en blot modsat Størrelse bliver det $= \sqrt{+a \times +a} = +a$ og intet andet, men er $+a$ en formeerende Størrelse, bliver det $= \pm a$. Derimod, naar $-a$ og $+a$ i $\sqrt{-a}$ og $\sqrt{+a}$ ere blot modsatte, kunde man ikke tillade sig den Frihed, og dette maae de være, naar Rodtegnet skieller den Størrelse under samme fra at staae i en umiddelbar Formerelses eller Formindskelses Hensigt til de andre Størrelser, som ere uden for Rodtegnet og med hvilke det hele forbindes formedelst det + eller —, som desuagtet forbinder Rodtegnet og hvad derunder er indbefattet med de andre Størrelser, da de Forandringer som sættes under Rodtegnet staaer ikke uden middelbar i Sammenhæng med de uden for. At det ikke heller er ligegyldigt i slige Tilfælde at sætte $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a} = \pm a$, kan sees af følgende Exempel. Lad os sætte den Liihed $x^2 - x + 1 = 0$. Ved at opløse den efter sædvanlig Maade faaes $x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}}$ og x^2 bliver da enten $= \frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} - \frac{3}{4}$, i Fald $\sqrt{-\frac{3}{4}} \times \sqrt{-\frac{3}{4}}$ sættes $= -\frac{3}{4}$, eller x^2 maatte blive $= \frac{1}{4} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} + \frac{3}{4}$, i Fald man sætter $\sqrt{-\frac{3}{4}} \times \sqrt{-\frac{3}{4}} = +\frac{3}{4}$, men at det sidste ikke kan antages, sees deraf, at i Fald denne sidste Værdie indbringes i Ligheden $x^2 - x + 1 = 0$, kan den ikke fyldestgiøre samme, da allene den Sætning at $\sqrt{-\frac{3}{4}} \times \sqrt{-\frac{3}{4}} = -\frac{3}{4}$ kan fyldestgiøre den.

Tegnet, da Udtrykket intet havde ved sig selv, som kunde angive det rette og ikke heller begge Rødderne vare lige gyldige.

§. XXX.

Jeg vover endnu at gaae videre, da jeg ikke tvivler om, at jo endog den sande Grund, baade, hvoraf man kan indsee, at saadanne Størrelser, som $\sqrt{-a}$, altid ere indbildte eller umuelige, saa og, hvorvidt saadanne multiplicerede eller dividerede med hinanden igien kan udbringe muelige Størrelser, allerbest og meere tilstrækkelig kan indsees ved at give Agt paa den Forskiel imellem Formindskende eller Formeerende, blot modsatte og blot virkelige Størrelser; thi hvad det første angaaer, da synes det, som man paa nogen Maade vel kunde uddrage Roden endog af $-a^2$, naar man ville forestille sig Roden at være af samme Slags, som $-a^2$ selv var af, da den blev $-a$ og følgelig var $\sqrt{-a^2}$ ikke umuelig, men dette var at ansee $-a^2$ som en blot virkelig Størrelse, hvilket den ikke kan være, saasnart den nødvendig har et af Tegnene. Deraf seer man og at de tager Feil, som troer, at man isteden for $\sqrt{-a}$ kunde sætte $-a^{\frac{1}{2}}$; thi Modsættelsen hører egentlig Qvadraten til og ikke Roden, og om man end gier Qvadraten til blot virkelig, maae dog Modsættelsen iagttages under Rodtegnet, saasom $\sqrt{-\frac{1}{2} \times a} = a^{\frac{1}{2}} \sqrt{-1}$. Derimod, uaar $-a^2$ skal være en Qvadrat og derhos ikke en blot virkelig Størrelse (som den ikke kan være formedelst sin Modsættelse) maae den være sammensat ved at en og den samme Størrelse var multiplieeret med sig selv. Denne maaete da enten være af det Slags, som er formindskende eller formeerende, eller blot modsat. Det første Slags maatte altid formedelst Erstatningens Lov give $+a^2$ og det sidste maatte give $-a \times -a$, eller om Roden var $+a$ og blot modsat, maatte man havt $+a \times +a$ (§. 22.). Efterdi altsaa $\sqrt{-a^2}$ hverken kan være kommen af en blot virkelig, ikke heller af blot modsat og ikke heller af formeerende og formindskende Størrelser, saa er den i alt Fald umuelig, hvilket er vel at mærke, da der og findes de, som har troet, at $\sqrt{-a} \times \sqrt{-a}$ kunde være $= \sqrt{-a^2} = -a$ og at $\sqrt{-a^2}$ i det Fald ikke var noget umueligt. Af forhen anførte Grunde ville jeg endog vove tvertimod det sædvanlig antagne at ansee $+\sqrt{+a^2}$ for en indbildt eller umuelig

Størrelse, saasnart som $+a^2$ skulle være sammensat af $+a \times +a$ betragtede som blot modsatte Størrelser.

§. XXXI.

Dernæst kan man og heraf tydeligere indsee, hvorvidt der af ulige Størrelsers Multiplication og Division kan udbringes muelige, som i Særdeleshed skeer ved at skille det blot virkelige fra det blot modsatte. Lad os sætte, at $\sqrt{-a}$ skal multipliceres med $\sqrt{-b}$, det bliver da $= \sqrt{(-a \times -b)} = \sqrt{(ab \times -1) \times -1} = -\sqrt{ab}$ (28) og ikke $\sqrt{+ab}$, hvilket sidste Udtryk, uagtet det nu blev anseet som mueligt, ville dog foraarsage Uvished i Udfaldet. Ligeledes, om $\sqrt{-a}$ skal divideres med $\sqrt{-b}$, ville man efter det sædvanlige faae $\sqrt{\frac{-a}{-b}} = \sqrt{\frac{+a}{b}}$. Sæt nu, at Roden af $\frac{a}{b}$, uddraget enten ved Approximation eller paa anden Maade, er $= c$, hvoraf skal jeg da viide, om den i dette Fald bliver $+$ eller $-c$? Derimod, naar man udleeder Sagen af de Grunde, som her er viist, seer man strax, hvorledes det muelige udbringes og hvordan det er beskaffen; thi i det Fald kan $\sqrt{\frac{-a}{-b}}$ blive $= \sqrt{\frac{a \times -1}{b \times -1}} = \sqrt{\frac{a}{b}} = c$, uden noget Tegn som en blot virkelig Størrelse (19. 21. 22.) som dog siden formedelst de Tegn, som havde været uden for Rodtegnet, kunde forbindes med andre Størrelser og blive formeerende eller formindskende.

§. XXXII.

De Adskillelser fra den umiddelbare Formeerelse eller Formindskelse, som kunde have Sted formedelst Dignitetens Tegn ere af mindre Vigtighed, saasom de lettere kan ophøies til sin Dignitet, end Roden kan uddrages og derfore kan de uden Møie bringes til den umiddelbare Sammenhæng med de andre Størrelser og derved blive formeerende eller formindskende, (24) ligesom ethvert Tal, der

multi-

multiplicerer og dividerer et andet, saasnart man sætter, at det allerede er skeet, saa er det Udkommende formedelst umiddelbar Tillæg eller Fradragelse føiet til andre Størrelser, i Fald der er saadanne og saaledes ere forandrede til Formeerende og Formindskende, om man endog uden for den Sammenhæng vilde anseet dem, som blot modsatte. Saaledes kan $+ (-a)^2$ og $+ (+a)^2$ begge være $= + a^2$, naar de paa saadan Maade forbindes med andre.

§. XXXIII.

Integrations og Differentiations Tegn kan og ophæve den umiddelbare Formeerelses og Formindskelses Forhold mellem de Størrelser, som sættes under disse Tegn, og de, som ere uden for samme, hvorved de under Tegnet bliver i Henseende til de andre at ansee som blot modsatte, da desuden det hele Differential eller Integral ved et andet Tegn forbindes med de andre Størrelser; derfore om X er en Function af x, saa skulle $-dX$ af den Aarsag ikke synes slet hen astkunde forandres til $d-X$, da de tvende Udtryk ikke err fuldkommen at ansee for eet og det samme, uagtet Differentiationen, naar den udføres, gier det for det meste ligegyldigt i Udfaldet, efterat Størrelserne derved igien ere bragte til umiddelbar Sammenhæng med de andre Størrelser (§. 24). Følgende maae jeg dog anføre: sæt at $(-x)^2$ skal differentieres, det bliver da $= d(-x \times -x) = -x\,d-x - x\,d-x = -2x \times d-x$, hvis jeg i den Sted sætter $-2x \times -dx$, bliver deraf efter sædvanlig Maade $+2x\,dx$ og følgelig det samme som $d(+x)^2$, hvilket endnu kunde være ligemeget, naar kun $(-x)^2$ og $(+x)^2$, i alle Henseende; vare ligegyldige og man siden ikke behøvede at kiende igien, hvilken af dem begge, der havde været. Denne Jagttagelse synes og Bougainville at have stiltiende sat forud, naar han i den første og Fundamentale Regel for Integrationen (Calcul. Integr. §. 1.) foreskriver ligefrem at udslette dx med videre i incomplexe Størrelser; thi hvis ikke de blot virkelige Størrelser alene skal kaldes incomplexe, maae man have sigtet saavel paa $d-x$, som dx; thi sæt, at man har diffnrentieret $(-x)^n$, hvis samme var udtrykket paa denne Maade at være $= n(-x)^{n-1}d-x$, da gaaer det fuldkommen an, hvis derimod Differentialet havde været udtrykket efter den sædvanligste Maade, at være $= -(-x)^{n-1}dx$ og dx da udsluttes,

tes, fik man — $(-x)^n$, som ikke var det rette. Derimod tilstaaes, at, naar Regelen til holdt, at søge Differentialet af den Størrelse, som staaer under Dignitetens Tegn og dermed at dividere, saa ville Divisionen igien ophæve den Sammenblandelse af Tegnene, som var skeet ved Multiplicationen og det rette ville komme ud. (See bemeldte Calc. Intgr. §. 19.)

§. XXXIV.

Ligesom $-dX$ og $d-X$ ikke skulle synes at være fuldkommen ligegyldige, saaledes, ifald I. betegner Integralet, skulle $-$I. X og I. $-$X heller ikke i alle Tilfælde kunde ansees for et og det samme, da det første betyder, at, naar Integrationen er skeet, skal det alt multipliceres med -1, men det sidste betegner, at den Størrelse, som integreres, førend Integrationen skeer, skal være multipliceret med -1 og tilmed indeholder ofte Integralet bestandige Størrelser, som siden maae tillægges, dog nægtes ikke det samme, som vi sagde om Differentiationen, at jo Udfaldet endog i Integrationen ville i de fleeste Tilfælde blive det samme, enten man satte $-$I. X eller I. $-$X, da endog de Maader at finde den bestandige, i det mindste de sædvanligste, ville igien oprette det, som ellers kunde synes ikke at være ganske rigtigt; men jeg vil herved slutte mine ringe Betragtninger, haabende tilstrækkelig at have viist, at den almindelig antagne Brug og Bestemmelse af Tegnene i visse Tilfælde bør indskrænkes og forandres, og at derved forekommes den Tvetydighed, som ellers ved visse Leiligheder synes at følge af Tegnenes sædvanlige Brug.

Om